

Departamento de Ingeniería Matemática
 MA26B-03: Matemáticas Aplicadas
 Profesor: Pierre Guiraud
 Auxiliares: Raul Aliaga, Maximiliano Rojo

Clase Auxiliar 2

1. Problema 1

Una de las primeras cosas que uno desea utilizar de las nociones de curvatura y torsión son:

- a) Una curva con $\kappa(t) = 0$ es una recta.
- b) Una curva con $\tau(t) = 0$ es una curva plana, si además $\kappa(t) = cte$, entonces la curva es un arco de circunferencia.

Demostración:

- a) Por las fórmulas de Frenet:

$$\kappa(t) = 0 \Rightarrow \frac{\delta \hat{T}}{\delta s} = 0$$

Es decir:

$$\hat{T}(s) = \hat{t}_0 = cte$$

pues $\hat{t} = \frac{\delta \sigma}{\delta s}$

$$\Rightarrow \int_0^s \frac{\delta \hat{\sigma}'}{\delta b} db = \int_0^s \hat{t} db = \vec{r}(s) - \vec{r}(0) = \hat{t}_0 s \Rightarrow \vec{r}(s) = \vec{r}(0) + s \hat{t}_0$$

Y esto es una recta.

- b) Si la torsión es cero:

$$\Rightarrow \frac{\delta \hat{B}}{\delta s} = 0 \Rightarrow \hat{B} = \hat{b}_0 = cte$$

Probemos que el plano donde vive la curva es normal al vector \hat{b}_0 o bien que cualquier punto de la curva punto \hat{b}_0 es cte (\Rightarrow no depende de s).

$$\langle \hat{b}_0, \vec{\sigma} \rangle = \vec{P}_0$$

luego, derivando:

$$\frac{\delta}{\delta s} \langle \hat{b}_0, \vec{\sigma} \rangle = \vec{P}_0$$

$$\underbrace{\langle \frac{\delta \hat{b}_0}{\delta s}, \vec{\sigma} \rangle}_{\tau=0} + \langle \hat{b}_0, \frac{\delta \vec{\sigma}}{\delta s} \rangle = \langle \hat{b}_0, \lambda \hat{t} \rangle = 0$$

Pues $\frac{\delta \vec{\sigma}}{\delta s} // \hat{t}$, Por lo tanto $\langle \vec{\sigma}, \hat{b}_0 \rangle = cte$ es decir $\vec{r}(s)$ vive en un plano.

y para $\vec{c}(s)$ con $\kappa = cte$:

$$\vec{c}(s) = \vec{\sigma} + R(s)\hat{n}$$

Con $R(s) = \frac{1}{\kappa(s)}$, derivando:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \vec{c}(s)}{\delta s} &= \frac{\delta \vec{\sigma}}{\delta s} + R_0 \frac{\delta \hat{n}}{\delta s} = \hat{t} + \frac{1}{\kappa} (-\kappa \hat{t} + \underbrace{\tau \hat{t}}_{\tau=0}) = \hat{t} - \hat{t} = 0 \\ \Rightarrow \vec{c}(s) &= cte \end{aligned}$$

Ahora si derivamos

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \|\vec{C}_0 - \vec{\sigma}\|^2 \\ \frac{\delta}{\delta s} \left(\frac{1}{2} (\vec{C}_0 - \vec{\sigma}) \bullet (\vec{C}_0 - \vec{\sigma}) \right) &= -\frac{1}{2} (-\vec{\sigma}' \bullet (\vec{C}_0 - \vec{\sigma}) - \frac{1}{2} (\vec{C}_0 - \vec{\sigma}) \bullet (-\vec{\sigma}')) = 0 \\ &= \vec{\sigma}' \bullet (\vec{\sigma} - \vec{C}_0) \\ &= \vec{\sigma}' \bullet \vec{\sigma} - \vec{\sigma}' \bullet \vec{\sigma} - \underbrace{\vec{\sigma}' \bullet (R(s)\vec{\sigma}'')}_{\hat{t} \bullet \hat{N}=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|\vec{C}_0 - \vec{\sigma}\| = cte$$

Por lo tanto : $\vec{\sigma}(s)$ vive en un arco de circunferencia.

2. Problema 2

- a) Demuestre que si Γ es una curva parametrizada en longitud de arco, se cumple que:

$$\tau(s) = \frac{(\vec{\sigma}' \times \vec{\sigma}'') \bullet \vec{\sigma}'''}{\|\vec{\sigma}''\|^2}$$

- b) Use la fórmula anterior para calcular la torsión de:

$$\vec{r}(t) = (\cos(t), \sin(t), t) \quad t \in [0, 4\pi]$$

Solución:

- a) Tenemos, que por definición: $\hat{T} = \frac{\vec{\sigma}'}{\|\vec{\sigma}'\|}$ pero como $\vec{\sigma}$ esta parametrizada en longitud de arco $\Rightarrow \|\vec{\sigma}'\| = 1$ luego:

$$\hat{T} = \vec{\sigma}' \quad \Rightarrow \quad \hat{N} = \frac{\vec{\sigma}'}{\|\vec{\sigma}'\|} \quad \Rightarrow \quad \hat{T} \times \hat{N} = \vec{\sigma}' \times \frac{\vec{\sigma}''}{\|\vec{\sigma}''\|}$$

al derivar, debemos tener en cuenta que $\|\vec{\sigma}''\|$ esta en función de s, por lo tanto, la derivada queda escrita como:

$$(\hat{T} \times \hat{N})' = \left(\frac{1}{\|\vec{\sigma}''\|} \right)' (\vec{\sigma}' \times \vec{\sigma}'') + \frac{1}{\|\vec{\sigma}''\|} \left(\underbrace{\vec{\sigma}'' \times \vec{\sigma}''}_{=0} + \vec{\sigma}' \times \vec{\sigma}''' \right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (\hat{T} \times \hat{N})' \bullet \hat{N} &= \left(\frac{1}{\|\vec{\sigma}''\|} \right)' \left(\frac{1}{\|\vec{\sigma}''\|} \right) (\vec{\sigma}' \times \vec{\sigma}'') \bullet \vec{\sigma}'' \\ &+ \left(\frac{1}{\|\vec{\sigma}''\|^2} \right) (\vec{\sigma}' \times \vec{\sigma}''') \bullet \vec{\sigma}'' \end{aligned}$$

y usando las identidades vectoriales:

$$(B \times C) \bullet A = (C \times A) \bullet B = (A \times B) \bullet C$$

se sigue:

$$\begin{aligned} (\hat{T} \times \hat{N})' \bullet \hat{N} &= \left(\frac{1}{\|\vec{\sigma}''\|} \right)' \left(\frac{1}{\|\vec{\sigma}''\|} \right) \left(\underbrace{\vec{\sigma}'' \times \vec{\sigma}''}_{=0} \right) \bullet \vec{\sigma}'' \\ &- \left(\frac{1}{\|\vec{\sigma}''\|^2} \right) (\vec{\sigma}' \times \vec{\sigma}'') \bullet \vec{\sigma}'' \end{aligned}$$

donde el menos lo da el hecho de que $A \times B = -B \times A$, se tiene entonces, que por la definición de torsión:

$$\tau(s) = \frac{(\vec{\sigma}' \times \vec{\sigma}'') \bullet \vec{\sigma}'''}{\|\vec{\sigma}''\|^2} \quad \blacksquare$$

- b) Notemos que para usar la fórmula, debemos contar con la curva parametrizada en longitud de arco, luego, calculamos $s(t)$:

$$\vec{r} = (\cos(t), \sin(t), t) \quad t \in [0, 4\pi]$$

$$\Rightarrow \vec{\sigma}' = (-\sin(t), \cos(t), 1) \quad \Rightarrow \quad \|\vec{\sigma}'\| = \sqrt{2}$$

$$\therefore \int_0^t \sqrt{2} d\tau = \sqrt{2}t = s$$

$$\Rightarrow \vec{\sigma}(s) = (\cos(\frac{s}{\sqrt{2}}), \sin(\frac{s}{\sqrt{2}}), \frac{s}{\sqrt{2}}) \quad s \in [0, 4\sqrt{2}\pi]$$

Luego, las derivadas y $\|\vec{\sigma}''\|^2$ son:

$$\vec{\sigma}' = (-\sin(\frac{s}{\sqrt{2}})\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos(\frac{s}{\sqrt{2}})\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}})$$

$$\vec{\sigma}'' = (-\cos(\frac{s}{\sqrt{2}})\frac{1}{2}, -\sin(\frac{s}{\sqrt{2}})\frac{1}{2}, 0)$$

$$\vec{\sigma}'' = (\sin(\frac{s}{\sqrt{2}})\frac{s}{2\sqrt{2}}, -\cos(\frac{s}{\sqrt{2}})\frac{s}{2\sqrt{2}}, 0)$$

$$\|\vec{\sigma}''\|^2 = \cos^2(\frac{s}{\sqrt{2}})\frac{1}{4} + \sin^2(\frac{s}{\sqrt{2}})\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\vec{\sigma}' \times \vec{\sigma}'' = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\sin(\frac{s}{\sqrt{2}}), -\cos(\frac{s}{\sqrt{2}}), \sin^2(\frac{s}{\sqrt{2}}) + \cos^2(\frac{s}{\sqrt{2}}))$$

$$(\vec{\sigma}' \times \vec{\sigma}'') \bullet \vec{\sigma}''' = \sin^2(\frac{s}{\sqrt{2}})\frac{1}{8} + \cos^2(\frac{s}{\sqrt{2}})\frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow \tau(s) = \frac{1}{2} \quad \blacksquare$$

3. Problema 3

Suponga que Γ es una curva plana ($\Gamma \in \mathbb{R}^3$) y que Γ es regular y que su parametrización es suave, que $\kappa(t) \neq 0 \quad \forall t$, $\kappa'(t) \neq 0 \quad \forall t$. Se define la evoluta de Γ como la curva parametrizada por $\vec{r}(t) = \vec{\sigma}(t) + \frac{1}{\kappa(t)}N(t)$. Pruebe que Γ_{ev} (la evoluta de Γ) es regular y que el vector tangente a la evoluta es paralelo a $N(t)$. Hint: Suponga Γ parametrizada en longitud de arco.

Demostración:

Veamos primero la regularidad: $(\sigma(\Gamma) \in \mathcal{C}^1 \text{ y } \|\vec{r}'(t)\| \geq 0)$

$$\vec{r}(t) = \vec{\sigma}(t) + \frac{1}{\kappa(t)}N(t)$$

Por las fórmulas de Frenet:

$$\Rightarrow \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{\sigma}'(t) + \frac{-\kappa'(t)}{\kappa^2(t)}N(t) + \frac{1}{\kappa(t)}(-\kappa(t)\hat{T} + \tau(t)\hat{B}(t))$$

Usando el Hint (Γ en longitud de arco):

$$= \hat{T}(t) - \frac{\kappa'(t)}{\kappa^2(t)} N(t) - \hat{T}(t) + \frac{\tau(t)}{\kappa(t)} \hat{B}(t)$$

Y puesto que Γ es una curva plana, $\Rightarrow \tau(t) = 0$:

$$\Rightarrow \vec{r}'(t) = -\frac{\kappa'(t)}{\kappa^2(t)} N(t)$$

Es decir, el vector tangente a la evoluta en t es paralela a $N \forall t$, pues $\kappa'(t) \neq 0$ y $\kappa(t) \neq 0$ (y así también se tiene que $\|\frac{d\vec{r}}{dt}(t)\| \geq 0 \quad \forall t$), por lo tanto Γ_{ev} resulta ser regular.

4. Problema 4

Considere la curva:

$$\vec{\sigma}(t) = (t \cos(t), t \sin(t), t) \quad t \in \mathbb{R}$$

Calcule $\hat{T}, \hat{N}, \hat{B}$

Solución:

Para quienes estuvieron en la clase, recordarán que este no era el enunciado original del problema, pero después de revisarlo a conciencia, lo mejor que queda de ejercicio para "soltar la mano", es calcular $\hat{T}, \hat{N}, \hat{B}$. Hay dos cosas importantes que notar:

- Los vectores tienen $\|\cdot\|$ igual a 1 .
- Al derivar vectores que estan multiplicados por un factor que depende de t , este también se deriva.

Lo último es muy importante, pues al normalizar \vec{T} , este suele quedar multiplicado por un factor que depende del parámetro.

Luego, apelando a razones pedagógicas, el cálculo explícito de los vectores queda de ejercicio para el lector (Hint importante: usar coordenadas cilíndricas):

$$\begin{aligned} \hat{T} &= \frac{1}{\sqrt{t^2 + 2}}(\hat{\rho} + t\hat{\theta} + \hat{k}) \\ \hat{N} &= \frac{1}{\sqrt{t^6 + 7t^4 + 18t^2 + 16}}(-t(t^2 + 3)\hat{\rho} + (t^2 + 4)\hat{\theta} - t\hat{k}) \\ \hat{B} &= \frac{1}{\sqrt{(t^2 + 2)^2 + (t^2 - 2) + 6}}(-2\hat{\rho} - t\hat{\theta} + (t^2 + 2)\hat{k}) \end{aligned}$$